ISSN 1413-389X Temas em Psicologia - 1999, Vol 7 nº 1, 23-36

Como crianças representam a operação de divisão: da linguagem oral para outras formas de representação[1]

Síntria Labres Lautert e Alina Galvão Spinillo[2]
Universidade Federal de Pernambuco

Resumo

O presente estudo investigou como crianças com diferentes níveis de instrução sobre a divisão representam a operação de divisão em situações gráficas e concretas. Oitenta crianças (5-8 anos) foram solicitadas a representarem no papel e através de material concreto duas operações de divisão oralmente apresentadas pelo examinador. As representações em ambas as situações foram analisadas em função da natureza dos grafismos adotados e do grau de detalhamento dos procedimentos de resolução explicitados. Verificou-se que o simbolismo matemático foi amplamente adotado pelas crianças, havendo um efeito da escolaridade apenas em relação ao grau de explicitação dos procedimentos de resolução representados. Observou-se, ainda, que a situação gráfica propiciava o aparecimento de representações mais elaboradas que a situação concreta. A principal conclusão foi que o conhecimento matemático e as situações exercem um impacto na forma como crianças representam seu conhecimento e na forma como seu conhecimento é influenciado pelas representações que adotam.

Palavras-chave: representação, divisão, desenvolvimento.

Children's representation of division: from oral language to other kinds of representation

Abstract

This study investigated the way children with different educational levels represent division in graphic situations (with pencil and paper) and using concrete material (tokens). Eighty children (5-8) have individually read two divisions and asked to represent them using paper and pencil or tokens. Children's representations were analyzed according to the graphic signs they used and according to the explicitness of their procedures to solve the divisions. It has been seen that most of the children used mathematical symbols. Instruction affected only the explicitness of the procedures adopted to solve the divisions. It was also seen that children made more elaborated representations when using paper and pencil than when using concrete material. The main conclusion has been that mathematical knowledge and the assessment situation have an impact on the way children represent their knowledge and also on the way their knowledge is affected by the representations they use.

Key-words: representation, division, development.

Sistemas de representação interessam a estudiosos do desenvolvimento cognitivo (e.g., Karmiloff-Smith, 1995; Perner, 1991; Pratt e Garton, 1993), visto que estão relacionados a inúmeros aspectos da cognição humana, tais como representações de modelos, de crenças, de estados mentais, da linguagem (oral e

1. Trabalho apresentado no Simpósio *Desenvolvimento lógico-matemático: Compreensão, representação e resolução de problemas e operações aritméticas* na XXIX Reunião Anual de Psicologia da Sociedade Brasileira de Psicologia, Campinas – SP, outubro de 1999.

2. Endereço para correspondência: A. G. Spinillo. Departamento de Psicologia. Pós-Graduação em Psicologia – CFCH 8º andar, Cidade Universitária, CEP 50.670-901, Recife – PE. Fone (81) 271-0599 e 271-272. Fax (81) 271-1843. e-mail: spin@npd.ufpe.br

Parte da Dissertação de Mestrado da primeira autora, sob a orientação da segunda, na Pós-Graduação em Psicologia da UFPE. Apoio financeiro CNPq e FACEPE. Agradecimento à colaboração de Sandra Ferreira e Sônia Duarte na transcrição dos dados e na análise dos protocolos.

escrita) e de conceitos matemáticos. O presente artigo versa sobre a representação de conceitos matemáticos em crianças, mais especificamente sobre o conceito de divisão. Antes, porém, de tratar deste conceito, considerações teóricas e evidências empíricas serão abordadas acerca da representação matemática.

Representação matemática: complexidade, diversidade e desenvolvimento

A complexidade das representações matemáticas se reflete nas diferentes formas de se conceber as relações entre representação e conhecimento/raciocínio.

Para Piaget (1976; 1978), por exemplo, as representações são o produto da construção de esquemas cognitivos internos, sendo o conhecimento matemático e as representações resultados de uma progressão geral mais ampla relacionada às capacidades lógicas características de cada estágio do desenvolvimento. Esta posição prioriza os invariantes operatórios, cuja aquisição depende das reequilibrações das estruturas cognitivas de natureza genérica.

Posição distinta é encontrada entre autores que enfatizam o caráter situado nesta relação. Meira (1993; 1995) afirma que as representações matemáticas são situadas e circunstanciais, construídas no decorrer da atividade e do processo de resolução. Tais representações incluem os sistemas de representação adotados (signos), os instrumentos envolvidos (material e recursos fornecidos) e as situações em que os sujeitos estão inseridos. A criação de representações simbólicas não seria, portanto, a expressão do pensamento, porém, algo que o constitui.

Outros estudiosos adotam posições que privilegiam tanto as capacidades lógicas do indivíduo como as situações de uso e produção (e.g.; Da Rocha Falcão, 1996; Nunes, 1997; Vergnaud, 1983, 1986, 1997).

Nunes (1997) ressalta como sistemas de signos influenciam as formas de pensar, salientando a importância da noção de ação mediada para compreender o raciocínio matemático, onde as ferramentas físicas e mentais assumem papel essencial na construção do pensamento. Os sistemas de signos possibilitam a construção de diferentes modos de representar um determinado conceito, e esses diferentes modos de representar influenciam a atividade matemática (situação). Mas, do mesmo modo que as representações influenciam a situação, elas também variam em função da situação proposta. As relações entre representação e conceitos matemáticos são discutidas pela autora através da importante distinção entre representações compactas e representações extensas[3]. As representações compactas são mais poderosas, aproximam-se mais do formalismo matemático e podem criar um novo domínio ou uma nova forma de pensar sobre a situação representada, estando conectadas a diversos significados, o que não ocorre com as representações extensas que são mais elementares. As representações compactas são mais complexas e mais difíceis de serem interpretadas e produzidas por crianças pequenas ou que estejam em momentos iniciais da aprendizagem de um conceito; estas crianças tendem a privilegiar o uso de representações extensas.

Considerando que a representação pode se transformar em objetos sobre os quais a criança opera quando resolve problemas, o uso de um ou de outro tipo de representação implica no uso de operações diferentes. Em outras palavras, o tipo de raciocínio requerido difere em função da forma de representar adotada. Embora o uso de representações extensas e

3. Representações extensas são exemplificadas por Nunes (1997, p: 32) através da seguinte situação: a criança, resolvendo um problema de adição do tipo "Maria tinha 3 balas de menta e 2 de laranja; quantas balas ela tem ao todo?" usa 3 dedos e 2 dedos para representar, respectivamente as balas de menta e as de laranja; procedendo, então, à contagem de todos os dedos. Esta mesma situação pode também ser representada de forma compacta, em que a criança representa as balas de menta pela palavra "três", representa as balas de laranja por dois dedos e, conta, então, "quatro, cinco".

compactas esteja relacionado ao desenvolvimento e à compreensão, variações no uso de uma ou de outra decorrem, ainda, do conceito e seus invariantes, bem como das situações que lhes dão significado.

Assim, o conhecimento matemático e as situações exercem um impacto na forma como os indivíduos representam seu conhecimento e na forma como seu conhecimento é influenciado pelas representações que adotam. As representações matemáticas parecem ter a dupla função de expressar e de ampliar/limitar o conhecimento sobre o conceito. Embora o domínio dessas representações não garanta a compreensão, o uso de representações cada vez mais elaboradas é ferramenta poderosa para o desenvolvimento da compreensão matemática, pois esta depende tanto da lógica do sujeito como de sua capacidade de utilizar os sistemas de representação.

Representação matemática: quantidades, operações e problemas aritméticos

A compreensão de conceitos matemáticos requer o domínio de representações relacionadas ao conhecimento sobre número, quantidades e algoritmos. Representações de quantidades, de operações e de problemas aritméticos têm sido investigadas através da linguagem oral, grafismos e material concreto (e.g.; Fayol, 1996; Higino, 1997; Hughes, 1986; Selva, 1998; Sinclair, Mello e Siegrist, 1989; Zunino, 1995).

Hughes (1986) relata, em uma série de investigações, como crianças de 3 a 7 anos representam graficamente quantidades e operações de adição e subtração a partir de material concreto manuseado pelo experimentador às vistas da criança. Nas tarefas sobre representação de quantidades, as crianças eram solicitadas a registrarem no papel quantos blocos de madeira o experimentador havia colocado sobre a mesa. A análise dos grafismos permitiu identificar quatro tipos de representação: idiossincrática (sinais gráficos sem regularidade e sem relação com a quantidade apresentada); pictográfica (grafismos que ilustram tanto a numerosidade como a aparência dos elementos); icônica (grafismos esquemáticos que garantem uma correspondência termo a termo e que ilustram a numerosidade sem relação com a aparência dos elementos) e simbólica (sinais convencionais e linguagem natural). As crianças tendiam a utilizar um mesmo tipo de grafismo para representar as diferentes quantidades de blocos sucessivamente apresentadas. As variações observadas decorriam da idade, sendo as representações idiossincráticas e icônicas mais utilizadas pelas crianças pré-escolares (3-4 anos), e as pictográficas e simbólicas pelas crianças em idade escolar (5-7 anos). Este resultado sugere uma progressão que se inicia com sinais inventados até o uso do simbolismo convencional da matemática. Importante é comentar que as representações icônicas e pictográficas correspondem, em certo sentido, à representação extensa, enquanto as representações simbólicas às representações compactas descritas por Nunes (1997).

Adotando procedimento semelhante, Hughes examinou como crianças representavam operações simples de adição e de subtração. Os resultados mostraram que nenhuma das crianças fazia uma representação adequada dessas operações. A maioria delas representava apenas a quantidade final de blocos resultante da operação realizada, enquanto algumas representavam a quantidade inicial. A transformação ocorrida sobre a quantidade inicial (adicionar/subtrair) era, em geral, omitida, ou, quando representada era ambígua (desenho de mãos), não sendo possível identificar se a transformação correspondia a uma adição ou a uma subtração. Os sinais convencionais (+ e –) nunca foram adotados, mesmo pelas crianças mais velhas já familiarizadas com o simbolismo formal da aritmética em sala de aula.

Esses resultados indicam que as crianças têm mais dificuldades em representar operações do que quantidades, sendo tais dificuldades relacionadas à representação da transformação ocorrida sobre a quantidade inicial (omissão ou ambigüidade). Em relação à representação das operações, alguns aspectos precisam ser comentados. Um deles refere-se às

razões pelas quais representar a transformação é difícil. No caso das omissões, é possível supor que a transformação, mesmo sendo feita diante da criança, não é tão evidente quanto o estado inicial e final da operação. Outra explicação, é que a criança acreditaria que a transformação não precisa ser representada, pois estaria, em certo sentido, contemplada na representação do estado final. De qualquer forma, seja por uma ou por outra razão, ou, ainda, pela combinação de ambas, a representação da transformação é atividade cognitiva complexa, pois envolve a integração e o estabelecimento de relações entre elementos (estado inicial e a quantidade adicionada ou subtraída). É possível que as crianças, principalmente as mais jovens no estudo de Hughes, tenham uma concepção fragmentada da operação de adição e de subtração, o que poderia dificultar a integração desses elementos, levando-as a representar os termos de forma isolada. No caso da ambigüidade na representação da transformação, é interessante notar que as crianças mais velhas não utilizavam sinais convencionais (+ e −), mesmo estando familiarizadas com eles no contexto escolar. Talvez estas crianças não soubessem que os sinais serviam para representar a transformação ou não aplicavam este conhecimento a outras situações além daquelas no contexto escolar.

Um segundo aspecto a ser comentado, refere-se à forma de analisar as representações das operações. As representações das quantidades foram analisadas a partir dos grafismos, enquanto para a análise das representações das operações utilizou-se a presença dos elementos apenas, ficando em aberta a questão de que grafismos são adotados na representação das operações. Pelos exemplos apresentados pelo autor (p. 73-75), observa-se que as crianças combinavam grafismos pictográficos e icônicos em uma mesma representação; no entanto, uma análise de ambos os aspectos não foi conduzida, de forma a permitir explorar o sistema de representação utilizado (grafismos) e os termos da operação contemplados nas representações.

Sinclair e cols. (1989) analisaram os grafismos de crianças (4-6 anos) a partir de quantidades apresentadas verbalmente e através de objetos. Foram identificados tipos de representação semelhantes àqueles descritos por Hughes (1986). Comparando-se, de modo geral, as freqüências de representações obtidas por Hughes (p: 60) e aquelas obtidas por Sinclair e cols. (p: 81), observa-se que as representações pictográficas foram pouco utilizadas pelas crianças no estudo de Sinclair e cols., apesar da presença dos objetos. Notes-se que Hughes solicitava que as crianças "registrassem" no papel da forma que desejassem, enquanto Sinclair e cols. solicitavam que "escrevessem" e "relessem" o que havia sido registrado. Isto pode ter provocado uma menor freqüência de grafismos relacionados à aparência dos objetos (representação pictográfica), favorecendo mais a escrita de números do que o desenho dos objetos. Ao que parece, a situação de produção influencia o tipo de grafismo adotado.

Importante é comentar, ainda, sobre a maneira como os dados foram analisados neste estudo. Foi conduzida uma análise global dos grafismos sem atentar para a possível relação entre o tipo de grafismo e a situação de produção (oral e concreta). Esta diferenciação seria desejável, visto que as representações não dependem apenas da forma de raciocinar da criança, mas também do material disponibilizado. Esta posição é compartilhada por Anghileri (1998), que afirma que a criança inventa representações que tanto expressam como também influenciam formas de raciocinar.

Os estudos apresentados examinam como os princípios lógico-matemáticos são expressos na representação feita pela criança, sem atentar para a influência da situação, seja em termos: (a) da instrução fornecida; (b) do ponto de partida da representação (do concreto para o gráfico; do oral para o gráfico); ou (c) do material disponibilizado. Considerando que as situações exercem um impacto na forma como os indivíduos representam seu conhecimento, é relevante investigar a relação entre tais aspectos, principalmente quanto a conceitos aritméticos mais complexos como a divisão.

A divisão: complexidade dos conceitos multiplicativos

A complexidade da divisão é amplamente reconhecida (e.g.; Vergnaud, 1983; 1991; Correa, Nunes e Bryant, 1998; Nunes e Bryant, 1997): envolve regras operatórias que implicam na utilização de subtração, multiplicação, busca de um quociente; pode não ter resultado exato ou resultar em fração e não apenas em números inteiros.

Nunes e Bryant (1997) afirmam que compreender a divisão (bem como a multiplicação) representa uma mudança qualitativa substancial no pensamento da criança. As operações de natureza aditiva envolvem o estado inicial, a transformação (algo adicionado ou retirado) e o estado final após a transformação; as relações parte-todo incluem duas variáveis que, adicionadas, formam um todo. A divisão, entretanto, por estar inserida no campo das estruturas multiplicativas, oferece desafios adicionais, tais como: as divisões sucessivas, multiplicações, subtrações (principalmente no caso de haver resto); o tamanho do todo, o número de partes, o tamanho das partes que precisa ser o mesmo, relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes. As relações parte-todo estabelecidas entre as variáveis são, portanto, diferentes daquelas presentes nas operações de natureza aditiva (Vergnaud, 1991; 1983).

Além da complexidade conceitual, a divisão, como comenta Anghileri (1993), envolve uma complexidade lingüística e gráfica. Do ponto de vista gráfico, por exemplo, a expressão verbal "12 dividido por 4" pode ser representada através de diferentes formas matemáticas convencionais (exemplos: 12/4, 12:4). Esta variedade provoca dificuldades de compreensão. Nos estudos conduzidos com crianças, tem-se evitado o uso dessas expressões verbais. No entanto, talvez, fosse relevante investigar como as crianças lidam com a linguagem matemática típica[4] desta operação que, embora complexa, é amplamente usada em sala de aula. Tomando como ponto de partida esta linguagem, seria interessante examinar como as crianças representam esta linguagem no gráfico e no concreto. Importante considerar que estes três sistemas de representação – linguagem oral, grafismos e material concreto, coexistem e interagem entre si na sala de aula para fins instrucionais.

A divisão: pesquisas com crianças

Pesquisas sobre o conceito de divisão em crianças, como documentado por Correa (1996), focalizam basicamente dois aspectos distintos: as concepções iniciais sobre a divisão as estratégias e os procedimentos de resolução adotados.

Estudos sobre as concepções iniciais são menos freqüentes e têm como sujeitos crianças jovens que ainda não foram ensinadas sobre a divisão no contexto escolar (e.g., Anghileri, 1993; Correa, 1996; Correa e Bryant, 1994; Correa, Nunes e Bryant (1998); Frydman e Bryant, 1988; Kornilaki e Nunes, 1997). Estes estudos mostram que esta compreensão inicial respalda-se, sobretudo, na idéia de repartir, noção esta que não garante a compreensão imediata da relação entre os termos da divisão.

Bem mais freqüentes são os estudos que investigam as estratégias infantis na resolução de problemas de divisão (e.g., Davis e Hunting, 1990; Deforges e Deforges, 1980; Kouba, 1989; Mulligan, 1992; Selva, 1998). A maioria dessas pesquisas examina as estratégias a partir de material concreto, variando os tipos de problemas apresentados (com e sem resto, problemas de partição ou quotição).

O estudo de Selva (1998) merece destaque por investigar o uso de estratégias na resolução de problemas a partir de situações que variavam em função do material disponibilizado. A autora comparou o desempenho e o uso de estratégias em crianças (6-8 anos) que foram divididas em três grupos em função de três situações distintas: representação concreta (fichas); representação gráfica (papel e lápis); e sem

4. Por linguagem matemática típica da divisão entende-se a expressão verbal formal e sem referente, como por exemplo "dezesseis dividido por cinco".

material (cálculo oral). Dentre outros dados, verificou-se que a situação concreta e a gráfica propiciaram percentuais de acertos semelhantes, percentuais estes superiores àqueles obtidos na situação sem material. Isso mostra que a situação gráfica favoreceu o desempenho da mesma forma que a representação concreta. As estratégias também variavam em função da situação. O material concreto propiciava o aparecimento de estratégias pouco flexíveis e representações diretas que se concentravam no enunciado do problema. A situação gráfica, por sua vez, permitia uma maior flexibilidade para lidar com os dados dos problemas, gerando estratégias mais sofisticadas que contemplavam de forma mais efetiva os elementos do problema. Outra diferença entre as situações era que na situação concreta a criança tendia a ignorar o resto, o que não ocorria nas demais situações. De modo geral, o uso de papel e lápis favoreceu o aparecimento de estratégias mais complexas e eficientes do que o uso das fichas. A principal conclusão foi que o material concreto inibe a utilização de estratégias mais flexíveis e apropriadas que vão além da representação direta do problema. O uso de papel e lápis, ao contrário, possibilita uma construção individual que permite lidar com os elementos necessários para refletir sobre como proceder durante a resolução.

Os estudos mencionados contribuem de maneira expressiva para uma compreensão do desenvolvimento e aquisição do conceito de divisão. Entretanto, além das concepções iniciais das crianças e das estratégias de resolução, um terceiro aspecto merece ser investigado: como as crianças representam a divisão. Sabe-se, por exemplo, como as crianças representam as quantidades e operações aritméticas, entretanto, pouco se sabe a respeito: (a) dos grafismos adotados na divisão (pictográficos, icônicos, simbólicos); (b) de que elementos (termos e procedimento) são contemplados nestas representações; e (c) da influência da situação e do material disponibilizado sobre a representação feita.

Quanto a este último ponto, torna-se relevante investigar a diversidade de representações feitas por uma mesma criança em diferentes situações. Um planejamento experimental desta natureza pode gerar dados interessantes sobre o desenvolvimento e sobre como sistemas diversos de representação limitam ou expandem as capacidades representacionais de crianças. Esta pesquisa pretende contribuir para o exame dessas questões, investigando crianças com diferentes níveis de instrução escolar sobre a divisão. Dois aspectos serão considerados: *como* e *que elementos* da operação de divisão são representados, tendo como ponto de partida operações de divisão apresentadas oralmente através da linguagem matemática formal.

MÉTODO

Participantes

Oitenta crianças de classe média, alunas de escola particular da cidade do Recife, igualmente divididas de acordo com o nível de instrução sobre a divisão: *Jardim (média: 5a 6m):* sem instrução formal sobre a divisão; *Alfabetização (média: 6a 3m):* iniciadas nas operações de adição e subtração simples, tendo recebido noções sobre situações de distribuição (exemplo: distribuição da merenda ou do material escolar com os colegas); *1ª série (média: 7a 10m)*: instruídas sobre adição e subtração (com e sem reserva), iniciando o aprendizado da multiplicação e da divisão exata com divisor de um algarismo; *2ª série (média de 8 anos e 9 meses):* instrução sobre a divisão através do algoritmo de resolução, resolvendo divisões com divisor de dois algarismos, com resto.

Procedimento e planejamento experimental

A partir de uma sondagem foram incluídas na amostra apenas crianças que contavam corretamente até 20 das 30 fichas apresentadas para contagem. Após a sondagem, lia-se para a criança duas operações de divisão, uma por vez ("Dezesseis dividido por cinco" e "Dezenove dividido por três"), pedindo-se que representasse: (a) no papel da maneira que desejasse (Situação 1: da linguagem oral para o gráfico); e (b) com fichas plásticas (4cm x 4cm) da maneira que desejasse (Situação 2:

da linguagem oral para o concreto). Ambas as situações foram aplicadas em uma ordem fixa [5] e em uma única sessão. Esclarecimentos eram solicitados sempre que necessário, sendo as entrevistas videografadas e transcritas em protocolos individuais.

SISTEMA DE ANÁLISE

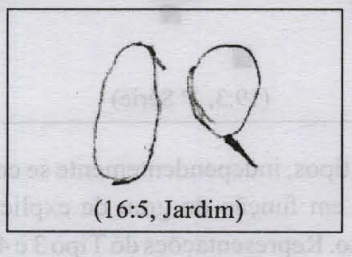
Os dados foram analisados[6] considerando-se dois aspectos distintos: (a) como a criança representa graficamente a divisão (Situação 1); e (b) o que é representado: os termos da divisão e os procedimentos de resolução (Situação 1 e 2). Comparações foram feitas entre ambos os aspectos em relação aos dados obtidos na Situação 1 (Gráfico).

Como a criança representa a divisão: análise dos grafismos

Os grafismos na Situação 1 (Oral–Gráfico) foram analisados, tomando-se por base a classificação de Hughes (1986):

Indiossincrática (ID): grafismos irregulares (traços, riscos e letras) sem que fosse identificada uma relação com a operação lida.

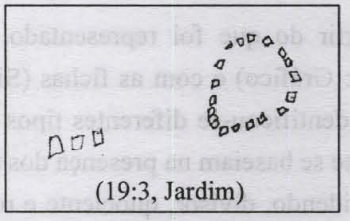
Figura 1. Situação 1 (Gráfico) Representação Idiossincrática e Representação do Tipo 1 (sem relação).



(16:5, Jardim)

Icônica (IC): sinais gráficos (traços, riscos, pontos e formas geométricas) que apresentam relação com as quantidades envolvidas na operação lida.

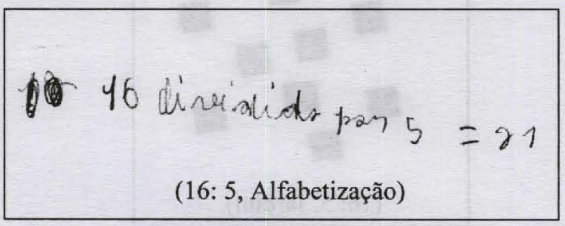
Figura 2. Situação 1 (Gráfico) Representação Icônica e Representação do Tipo 2 (relação com enunciado, sem tentativa de resolução).



(19:3, Jardim)

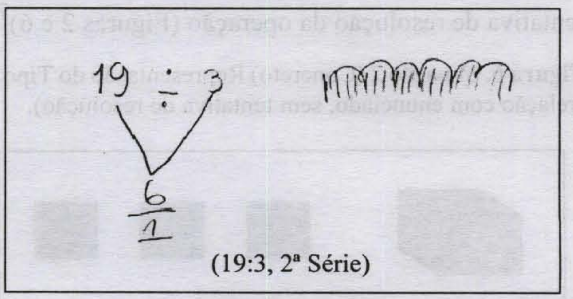
Simbólica (S): símbolos convencionais (números, sinais convencionais) e linguagem natural. Há representações que combinam o icônico com o simbólico. Estas representações foram denominadas Simbólica Mista, enquanto as primeiras Simbólica Pura.

Figura 3. Situação 1 (Gráfico) Representação Simbólica Pura e Representação do Tipo 3 (resolução através de outra operação).



(16: 5, Alfabetização)

Figura 4. Situação 1 (Gráfico) Representação Simbólica Mista e Representação do Tipo 4 (resolução através da divisão).



(19:3, 2ª Série)

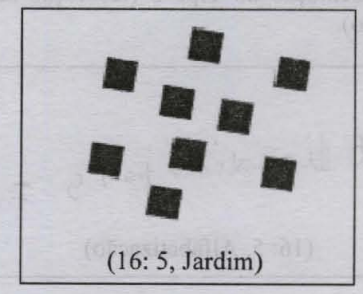
5. Com esta ordem procurou-se evitar um possível efeito das fichas plásticas sobre a representação gráfica.
6. Nenhuma diferença foi observada entre as operações em relação a quaisquer dos aspectos investigados.

O que a criança representa: análise dos termos e dos procedimentos de resolução

A partir do que foi representado no papel (Situação 1: Gráfico) e com as fichas (Situação 2: Concreto), identificou-se diferentes tipos de representações que se baseiam na presença dos termos da divisão (dividendo, divisor, quociente e resto) e no processo de resolução (valores intermediários obtidos, divisões sucessivas, subtrações, multiplicações):

Tipo 1 (sem relação): grafismos (Situação 1) ou quantidade de fichas (Situação 2) sem relação com as quantidades da operação lida (Figuras 1 e 5).

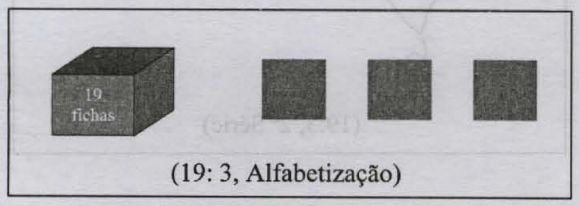
Figura 5. Situação 2 (Concreto) Representação do Tipo 1 (sem relação).



(16: 5, Jardim)

Tipo 2 (enunciado): enunciado (completo ou incompleto), podendo incluir sinais indicadores da operação (= ÷ + − x) no caso da Situação 1. Não há tentativa de resolução da operação (Figuras 2 e 6)[7].

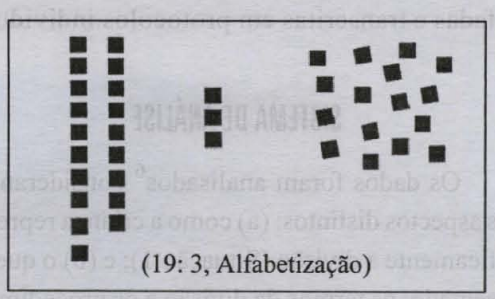
Figura 6. Situação 2 (Concreto) Representação do Tipo 2 (relação com enunciado, sem tentativa de resolução).



(19: 3, Alfabetização)

Tipo 3 (resolução através de outras operações): enunciado completo e o resultado, resultado este obtido através da adição e subtração. Pode incluir sinais indicadores da operação realizada (=, ÷, +, −, x) (Figuras 3 e 7).

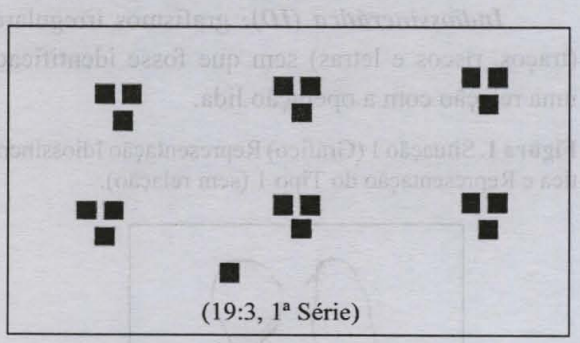
Figura 7. Situação (Concreto) Representação do Tipo 3 (resolução através de outra operação).



(19: 3, Alfabetização)

Tipo 4 (resolução através da divisão): o processo de resolução representado envolve a operação de divisão. No caso da Situação 1 (grafismos), há utilização dos sinais correspondentes e do algoritmo da divisão. Observa-se a representação de valores intermediários (exemplo: 15 ou 18) obtidos através de divisões sucessivas e de subtração e multiplicação. O resto nem sempre é representado, porém o quociente está sempre presente (Figuras 4 e 8).

Figura 8. Situação 2 (Concreto) Representação do Tipo 4 (resolução através da divisão).



(19:3, 1ª Série)

Esses tipos, independentemente se corretos ou não, variam em função do grau de explicitação da representação. Representações do Tipo 3 e 4 são mais explícitas e detalhadas do que as demais; pois envolvem a representação do processo de resolução, indo além do simples enunciado (Tipo 2). O Tipo 4 refere-se à divisão e o Tipo 3 refere-se a outras operações aritméticas.

7. Os cubos significam que a criança fez uma pilha de fichas, estando indicada a quantidade de fichas empilhadas.

Dois juizes independentes[8] analisaram os grafismos e os tipos de representação, obtendo-se um percentual de 97.3% de concordância. As discordâncias foram analisadas por um terceiro juiz, também independente, cuja classificação foi considerada final.

ANÁLISE DOS DADOS

Inicialmente são apresentados os resultados em cada situação e, posteriormente são feitas comparações entre elas.

(1) Situação 1 (Gráfico)

Análise dos grafismos

Como as crianças representam operações de divisão no papel? Como se caracterizam seus grafismos? Como indica a Tabela 1, em todas as séries, a grande maioria das representações é simbólica (em especial a representação simbólica pura). Ao que parece, independentemente do nível de conhecimento escolar sobre a divisão, as representações se caracterizam por grafismos de natureza simbólica.

Tabela 1. Porcentagem de representações na Situação 1 (Gráfico).

Séries	Grafismos			
			Simbólico	
	Idiossincrático	Icônico	Misto	Puro
Jardim	5	12.5	2.5	80
Alfa	0	7.5	2.5	90
1ª	0	0	2.5	97.5
2ª	0	5	15	80

Diferenças significativas foram encontradas apenas entre o Jardim e a 1ª série, como identificado pelo teste U de Mann-Whitney ($p < 0,05$). Enquanto as crianças da 1ª série adotam exclusivamente a representação simbólica, as do Jardim adotam também outros grafismos. As crianças do Jardim foram as únicas que adotaram representações idiossincráticas, sendo, também, as que mais produziram representações icônicas. Isto talvez tenha ocorrido porque estas crianças não haviam sido, ainda, instruídas sobre a divisão, e embora conhecendo os números, recorriam a outros tipos de grafismos. As representações exclusivamente simbólicas da 1ª série podem ser conseqüência do ensino introdutório da divisão ser fundamentalmente voltado para o uso de números, o que pode ter limitado o aparecimento de outras formas de representação.

Os procedimentos de resolução

As crianças representam os procedimentos de resolução que adotam? Pelo exposto na Tabela 2, parece que sim, mesmo que tais procedimentos não se refiram sempre à divisão.

Tabela 2. Porcentagem de tipos de representação na Situação 1 (Gráfico).

Séries	Tipos de representação			
	1 (s/ relação)	2 (enunciado)	3 (resolução por outra operação)	4 (resolução pela divisão)
Jardim	27.5	55	17.5	0
Alfa	7.5	55	37.5	0
1ª	0	0	5	95
2ª	0	15	0	85
Total	9	31	15	45

A série mostrou ser fator importante, como detectado pelo Kruskal-Wallis ($p < 0,0001$). O teste U de Mann-Whitney revelou diferenças significativas entre todas as séries, exceto entre a 1ª e 2ª séries que apresentaram um mesmo padrão de resultados. Verifica-se, portanto, um efeito da instrução escolar sobre

8. Os juizes eram alunas de pós-graduação que dominavam o tema em estudo e eram experientes neste tipo de análise, havendo sido treinadas para lidar com os dados.

o tipo de representação adotado. A grande maioria das representações das crianças que haviam sido formalmente instruídas sobre a divisão (1ª e 2ª séries) incluía os procedimentos de resolução através da divisão (Tipo 4), enquanto que aquelas que não haviam recebido tal instrução limitavam-se a representar o enunciado (Tipo 2) ou produziam representações sem conexão com a operação apresentada (Tipo 1). No entanto, há diferenças mesmo entre as crianças que não foram instruídas sobre a divisão. As crianças da Alfabetização representavam mais freqüentemente os procedimentos de resolução do que as crianças do Jardim (Tipo 3: 37.5% e 17.55% respectivamente). Os procedimentos referiam-se à adição e à subtração, operações familiares às crianças da Alfabetização que não haviam sido introduzidas à divisão.

Relações entre grafismos e procedimentos de resolução

A natureza dos grafismos estaria associada ao tipo de representação? Embora pouco expressiva e localizada na 1ª série, esta correlação existe, como ilustra a Tabela 3.

Tabela 3. Porcentagem de representações por tipo e grafismo.

Grafismos	Tipos 1 (s/ relação)	2 (enunciado)	3 (resolução por outras operações)	4 (resolução pela divisão)
Idiossincrático	14.3	0	0	0
Icônico	21.4	8	4.2	2.8
Simbólico	64.3	92	95.8	97.2

O teste de Spearman revelou correlação significativa entre grafismos e tipos de representação ($p < 0,05$). Tal correlação deveu-se apenas à correlação detectada na 1ª série ($p < 0,0001$), visto que a quase totalidade das representações nesta série (95%) era ao mesmo tempo simbólica e do Tipo 4 (resolução pela divisão). Por que isto ocorreu apenas com as crianças da 1ª série? Uma possível explicação para isto é que as crianças da 1ª série haviam sido introduzidas à operação de divisão, instrução esta, como mencionado, baseada na ênfase do simbolismo matemático formal. Este conhecimento escolar parece ter sido aplicado à situação de exame neste estudo.

Comparando-se os resultados na Tabela 1 (grafismos) e na Tabela 2 (tipos de representação), nota-se que o efeito da escolaridade é mais acentuado em relação aos tipos de representação do que em relação aos grafismos. Ao que parece, um maior conhecimento escolar sobre a divisão provoca o surgimento de representações mais explícitas e detalhadas. Os grafismos, entretanto, são simbólicos em todas as séries.

(2) Situação 2 (Concreto)

Nesta situação, por não incluir grafismos, apenas os tipos de representação foram analisados, como indica a Tabela 4.

Como identificado pelo Kruskal-Wallis, o uso dos diversos tipos de representação varia em função da série ($p < 0,0001$). Aplicando-se o U de Mann-Whitney em cada série separadamente, notou-se diferenças significativas entre todas as séries ($p < 0,01$); exceto entre a 1ª e 2ª séries que, mais uma vez, apresentaram o mesmo padrão de resultados.

Tabela 4. Porcentagem de tipos de representação na Situação 2 (Concreto).

Séries	Tipos de representação 1 (s/ relação)	2 (enunciado)	3 (resolução por outra operação)	4 (resolução pela divisão)
Jardim	45	47.5	7.5	0
Alfa	5	80	15	0
1ª	2.5	37.5	5	50
2ª	0	22.5	0	77.5
Total	13	47	7	32

Nota: Uma criança da 1ª série não realizou a tarefa no concreto nas duas operações (16:5 e 19:3).

Os resultados são semelhantes àqueles obtidos na Situação 1 (Gráfico), descritos na Tabela 2. Novamente, o efeito da instrução é claramente evidenciado em relação aos tipos de representação. Este dado sugere que o grau de explicitude da representação

varia em função do conhecimento que a criança tem sobre a divisão.

(3) Comparação entre as situações: os tipos de representação no gráfico e no concreto

Haveria diferenças no grau de explicitação da representação que pudessem ser atribuídas a variações na situação? Ou isto dependeria apenas do conhecimento que a criança tem sobre a divisão? A Tabela 5 apresenta os dados relativos a esta questão.

Considerando a amostra como um todo, o teste de Friedman demonstrou que os tipos de representação variam em função da natureza da situação ($p < 0,05$): as representações no concreto se caracterizam como Tipo 2 (enunciado), enquanto que no gráfico se caracterizam como Tipo 4 (resolução pela divisão).

Tabela 5. Porcentagem de tipos de representação no gráfico e concreto em cada série.

Séries	Gráfico (Situação 1)				Concreto (Situação 2)			
	1	2	3	4	1	2	3	4
Jardim	27.5	55	17.5	0	45	47.5	7.5	0
Alfa	7.5	55	37.5	0	5	80	15	0
1ª	0	0	5	95	2.5	37.5	5	50
2ª	0	15	0	85	0	22,5	0	77,5
Total	9	31	15	45	13	47	7	32

Nota: Uma criança da 1ª série não realizou a tarefa no concreto nas duas operações (16:5 e 19:3)

O Wilcoxon revelou que os tipos de representação variam entre situações apenas para as crianças do Jardim e da 1ª série ($p < 0,05$). No Jardim, representações elementares Tipo 1 são mais freqüentes no concreto que no gráfico; enquanto representações mais sofisticadas, como as do Tipo 3, ocorrem mais no gráfico que no concreto. Na 1ª série, representações Tipo 2 estão presentes no concreto e ausentes no gráfico; enquanto as Tipo 4 são bem mais freqüentes no gráfico que no concreto. Esses dados indicam que, para essas crianças, as representações mais elaboradas (Tipo 3 e Tipo 4) são mais freqüentemente produzidas no gráfico do que no concreto. O concreto parece não possibilitar o uso de representações mais detalhadas e explícitas que incluam o processo de resolução, enquanto o gráfico permite o aparecimento de tais representações.

Por que as crianças da Alfabetização e da 2ª não são sensíveis a variações na situação? É possível supor que isto ocorra por razões distintas: as representações mais freqüentes das crianças da Alfabetização referem-se ao enunciado (Tipo 2). Representar o enunciado, de forma completa ou incompleta, parece ser possível de ser feito tanto no papel como através de material concreto. Por esta razão, não faz diferença o tipo de recurso disponibilizado. Em relação à 2ª série, entretanto, a razão da não diferença entre situações é de outra ordem. Por já haverem sido ensinadas sobre a divisão, estas crianças representam os termos da divisão e o processo de resolução tanto no concreto como no gráfico. De modo geral, é na situação gráfica em que mais freqüentemente são produzidas representações mais explícitas e elaboradas.

CONCLUSÕES

As conclusões derivadas deste estudo serão apresentadas em blocos, cada um versando sobre as questões levantadas no início deste artigo relativas à representação da divisão por crianças.

Como as crianças representam a divisão?

De modo geral, as crianças nas séries investigadas representam através de grafismos de natureza simbólica. Isto foi observado, inclusive, entre as crianças do Jardim. O segundo sistema de representação mais adotado, embora pouco freqüente, foi o icônico. Grafismos icônicos apareciam, também, combinados com grafismos simbólicos (no caso das representações simbólicas mistas). Este resultado está de acordo com dados documentados na literatura sobre a representação de operações e problemas de adição e subtração que mostram que

crianças, ao inventar sinais gráficos combinam estes dois sistemas em suas representações (e.g.; Fayol, 1996; Sinclair e cols., 1989; Zunino, 1995). Diferentemente, entretanto, observou-se que houve um maior uso de grafismos simbólicos neste estudo do que em relação a outros com crianças de idades semelhantes. Uma possível explicação para isto é que, na presente investigação, o ponto de partida para a representação feita pela criança no papel era uma expressão matemática, formal, abstrata e sem referente. Talvez, a linguagem oral matemática tenha propiciado o uso de simbolismos. Isto reforça a idéia de que a situação (instrução dada, linguagem utilizada, material disponibilizado) na qual a criança é colocada influencia a representação feita.

O que as crianças representam? Enunciado ou procedimentos?

Em relação aos tipos de representação adotados, o dado mais interessante refere-se à representação dos procedimentos de resolução. Importante ressaltar que o foco deste estudo era apenas explorar o grau de explicitação das representações quanto aos procedimentos adotados, e não a adequação ou inadequação das estratégias de resolução. Em função disto, considerou-se como mais sofisticadas as representações que incluíam os procedimentos de resolução, independentemente se adequados (uso da divisão) ou inadequados (adição e subtração). O que se observou é que, com exceção das crianças do Jardim, as crianças representam os seus procedimentos de resolução, usando as operações que já dominam no contexto escolar: na Alfabetização as representações incluem a adição e a subtração; enquanto na 1ª e na 2ª séries incluem a divisão. Representar apenas o enunciado da operação foi também observado. Talvez, algumas crianças, principalmente do Jardim e Alfabetização, tenham entendido o contexto experimental como solicitando delas apenas a representação do que era literalmente dito pelo examinador (o enunciado da operação). Isto, entretanto, não foi freqüente nas demais séries que tendiam a representar os procedimentos de resolução.

Qual a influência da situação sobre a representação feita?

Os dados neste estudo mostram que o que a criança representa não expressa apenas suas habilidades lógico-matemáticas; expressa, ainda, os limites e as possibilidades representacionais conferidas pela própria situação. Um exemplo que ilustra esta afirmação é o caso das crianças da 1ª série que na situação concreta faziam representações elementares e que na situação gráfica produziam representações bem mais elaboradas. Esta susceptibilidade à situação [9] tende a diminuir com o avanço em escolaridade que, por sua vez, é acompanhado de um maior conhecimento sobre a divisão, conhecimento este aplicado a ambas as situações. Importante mencionar que fato semelhante ocorre em relação a aquisições de natureza lingüística, como documentado por Spinillo (1993). Nesta investigação, crianças que dominavam um esquema narrativo de história eram menos susceptíveis a variações experimentais do que crianças que não dominavam, apresentando o mesmo bom desempenho em diversas situações de produção de histórias. De modo geral, o efeito da situação (gráfica e concreta) sobre a representação feita pela criança neste estudo, foi semelhante àquele observado por Selva (1998) em relação às estratégias de crianças na resolução de problemas de divisão. Tanto nesta como naquela investigação, o material concreto disponibilizado limitou o aparecimento de formas mais flexíveis e elaboradas de lidar com a divisão.

Qual o efeito da instrução sobre as representações?

De certa forma, este aspecto foi contemplado nos comentários acima. Vale ressaltar, entretanto, que a escolaridade tem um efeito mais acentuado

9. Esta susceptibilidade se caracteriza por variações no desempenho de um mesmo indivíduo em função de variações nas situações apresentadas, ainda que o mesmo fenômeno esteja sendo investigado nas diferentes situações propostas.

sobre os tipos de representação relativos aos procedimentos do que sobre os grafismos. Estes, como mencionado, são de natureza simbólica, independentemente da série das crianças. No entanto, o efeito da instrução sobre as representações é melhor compreendido quando associado à situação de produção em que a criança é colocada. Supõe-se, então, uma interação entre esses fatores.

Muito mais, entretanto, precisa ser explorado sobre a representação da divisão. Por exemplo, comparar um mesmo grupo de crianças representando operações e problemas de divisão, tanto no concreto como no gráfico (estudo em andamento).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anghileri, J. (1993). The language of multiplication and division. Em K. Durkin e B. Shire (orgs.), *Language in mathematical education* (pp. 95-104). Buckingham: Open University Press.

Anghileri, J. (1998). Uses of counting in multiplication and division. Em I. Thompson (org.), *Teaching and learning early number* (pp. 41-51). Buckingham: Open University Press.

Correa, J. (1996). A compreensão inicial do conceito de divisão partitiva em tarefas não-computacionais. Em M. H. Novaes e M. R. F. de Brito (orgs.), *Psicologia na educação: Articulação entre pesquisa, formação e prática de pedagógica* (pp. 151-165). Rio de Janeiro: *ANPEPP/Xenon. (Coletâneas da ANPEPP, Vol. 1, n.5).*

Correa, J. e Bryant, P. (1994). Young children's understanding of division cincepts. Em International Society for the Study of Behavioural Development (org.). *Proceedings. XIII Biennial Meeting* (p.353). Amsterdam, Netherlands: ISSBD.

Correa, J.; Nunes, T. e Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a non-computational task. *Journal of Educational Psychology, 90*, 321-329.

Da Rocha Falcão, J. (1996). Elementos para uma abordagem psicológica do desenvolvimento de conceitos científicos e matemáticos. Em M. G. Dias e A. G. Spinillo (orgs.), *Tópicos em psicologia cognitiva* (pp. 141-167). Recife: Editora Universitária da UFPE.

Davis, G. E. e Hunting, R. P. (1990). Spontaneous parttioning: Pre-schoolers and discrete items. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 367-374.

Deforges, A e Deforges, C. (1980). Number-based strategies of sharing in young children. *Educational Studies, 6*, 97 –109.

Fayol, M. (1996). *A criança e o número: Da contagem à resolução de problemas.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Frydman, O. e Bryant, P. (1988). Sharing and the understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development, 3*, 323-339.

Higino, Z. (1997). Desenvolvimento a compreensão da notação escrita do sistema de numeração. Em L. Meira; A. G. Spinillo e T. Avelar (orgs.), *Anais. II Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática* (pp. 46-53). Recife.

Hughes, M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning mathematics*. Oxford: Blackwell.

Karmiloff-Smith, A. (1995). *Beyond modularity*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Kornilaki, E. e Nunes, T. (1997, julho). *What do young children understand about division?* Trabalho apresentado em Reunião Anual do International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lahti, Finland.

Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 147-158.

Meira, L. (1993). A aprendizagem e ensino de funções. Em A. D. Schliemann; D. Carraher; A. G. Spinillo; L. Meira; J. T. da Rocha Falcão e N. Acioly-Regnier (orgs.), *Estudos em psicologia da educação matemática* (pp. 62-84). Recife: Editora Universitária da UFPE.

Meira, L. (1995). The microevolution of mathematical representations into children's activity. *Cognition and Instruction, 13*, 269-313.

Mulligan, J. (1992). Chidren's solutions to multiplication and division word problems: A longitudinal study. Em W. Geeslin e K. Graham (orgs.), *Procedings. XVI International Conference for the Psichology of Mathematics Education* (Vol. 2, p.144-151). Durham, USA.

Nunes, T. (1997). Systems of signs and mathematical reasoning. Em T. Nunes e P. Bryant (orgs.), *Learning and teaching mathematics* (pp. 29-44). Hove: Psychology Press.

Nunes, T. e Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Perner, J. (1991). *Understanding the representational mind.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Piaget, J. (1976). *A equilibração das estruturas cognitivas. Problema Central do desenvolvimento.* Rio de Janeiro: Zahar.

Piaget, J. (1978). *A formação do símbolo na criança: Imitação, jogo e sonho, imagem e representação.* Rio de Janeiro: Zahar.

Pratt, C. e Garton, A. (1993). Systems of representation in children. Em C. Pratt e A. Garton (orgs.), Systems of representation in children (pp. 1-10). Chichester: Wiley e Sons.

Selva, A.C.V. (1998). Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. Em A. Schliemann e D. Carraher (orgs.), *A compreensão de conceitos aritméticos. Ensino e pesquisa* (pp 95-119). Campinas: Papirus.

Sinclair, A.; Mello, D. e Siegrist, F. (1989). A notação numérica na criança. Em H. Sinclair (org.), *A produção de notações na criança: Linguagem, número, ritmos e melodias* (pp. 71-96). São Paulo: Cortez.

Spinillo, A. G. (1993). Era uma vez... e foram felizes para sempre. Esquema narrativo e variações experimentais. *Temas em Psicologia. Desenvolvimento Cognitivo: Linguagem e Aprendizagem, 1*, 67-78.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. Em R. Lesh e M. Landau (orgs.), *Acquisition of mathematics: Concepts and process* (pp. 127-174). London: Academic Press.

Vergnaud, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matematicas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológia, 1* (5), 76-90.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuola primaria.* México: Trillas.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. Em T. Nunes e P. Bryant (orgs.), *Learning and teaching mathematics. An international perspective* (pp. 5-28). Hove: Psychology Press.

Zunino, D. L. (1995). *A matemática na escola: Aqui e agora.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Recebido em: 30/10/99
Aceito em: 08/03/01